Deducción de las fórmulas de Black-Scholes mediante valor esperado del pago futuro *

Alexis Sánchez Tello de Meneses

4 Septiembre 2014

1 Abstract

Se desarrollará a partir del modelo de evolución *log-normal* para un subyacente, las fórmulas de Black-Scholes para el precio de opciones plain vanilla (call/put) europeas, así mismo, mediante derivación directa de las fórmulas con respecto a sus parámetros, obtendremos las griegas más representativas.

2 Modelo *log-normal* del subyacente.

Se asume que la evolución del precio del subyacente (precio de una de acción en el mercado de renta variable), S, es un proceso estocástico continuo y *log-normal*. La descripción matemática de este proceso queda recogida en la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1}$$

Aquí, dS_t es $S_{t+dt} - S_t$. La deriva del proceso sería μ, que coincidirá con el tipo de interés continuo y anual libre de riesgo de la cuenta bancaria, escogiéndose esta como numerario, para que el proceso del logaritmo del subyacente sea una martingala. La volatilidad anualizada del subyacente será σ, siendo dW_t un salto gaussiano de media cero y desviación típca $\sqrt{dt}$.

Si incorporamos a (1) los pagos de dividendo de manera continua con una tasa anual δ, el subyacente, al pasar del valor S_t en t al valor S_{t+dt} en $t + dt$, disminuye su valor en la cuantía δS_t, que es justamente el dividendo que se acaba de repartir. La ecuación (1) corregida con el pago de dividendos, quedaría de la forma:

$$dS_t = \mu S_t dt - \underbrace{\delta S_t dt}_{dividendo} + \sigma S_t dW_t \tag{2}$$

* LaTeX

2.1 Integración por el lema de Îto

Para obtener la evolución del subyacente en función del tiempo y de la variable aletoria normal estándar, efectuaremos el cambio de variable $S_t^{'} = \ln S_t$ en la ecuación (2), y aplicaremos el lema de Îto para calcular la diferencial de la nueva variable.

El lema de Îto para una función que sólo depende del subyacente *(i.e.* $S_t^{'} = f(S_t)$*)* tendría la siguiente forma:

$$dS_t^{'} = \frac{df}{dS_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dS_t^2} dS_t^2 + \dots \tag{3}$$

Usando $S_t^{'} = f(S_t) = \ln(S_t)$ en el desarrollo en serie, y quedándonos hasta términos de segundo orden en dS_t:

$$\begin{aligned} dS_t^{'} &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S_t^2} dS_t^2 + \dots \\ &= (\mu - \delta)\, dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dW_t^2 + \dots \\ &= \left(\mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t \end{aligned} \tag{4}$$

Usando el anterior cambio de variable reducimos la ecuación diferencial estocástica log-normal a una ecuación, de saltos normales de desviación típica $\sigma\sqrt{dt}$. Esta ecuación se puede *integrar* directamente dando como resultado la evolución temporal del logaritmo del subyacente. (Sabiendo que en el sentido de variables aleatorias, a efectos prácticos de valores esperados y momentos, se cumple que $\sigma dW_t \simeq \sigma\sqrt{dt} X\,(0,1)$, siendo $X\,(0,1)$ la variable aleatoria normal estándar). Sustituyéndolo en la ecuación anterior.

$$S_T^{'} = S_t^{'} + \left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau} X(0,1) \tag{5}$$

Aquí T representa el tiempo final de la evolución de la funcion de cambio de variable del subyacente, y aqui τ es $T - t$.

Deshaciendo el cambio de variable en (5), obtenemos la evolución del subyacete.

$$S_T = S_t e^{\left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau} X(0,1)} \tag{6}$$

3 Valoración de una Call Europea

El precio de una call europea lo deducimos como el valor esperado del pago a vencimiento, descontando hasta la fecha de valoración. Supongamos que el vencimiento es en T y la fecha de valoración es t, denotemos $\tau = T - t$. El valor esperado del pago futuro sera

$$E\left(e^{-r\tau}\left[S_T - K\right]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau}\left[S_T - K\right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{7}$$

Aquí r es el interés libre de riesgo y $[S_T - K]^+$ representa la función de pago en tiempo T, que será $S_T - K$ si $S_T - K > 0$ o 0 en caso contrario.

Sustituyendo S_T por la expresión de su evolución en función de $\tau = T - t$, y teniendo en cuenta que x es $X(0,1)$, la variable aleatoria normal estándar de media 0 y desviación típica 1, obtenemos:

$$E\left(e^{-r\tau}\left[S_T - K\right]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r\tau}\left[S_t e^{\left[\left(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}x\right]} - K\right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{8}$$

Forzamos que el parámetro μ del modelo sea igual a r para evitar oprtunidad de arbitraje. Por tanto la ecuación anterior queda de la forma:

$$E\left(e^{-r\tau}\left[S_T - K\right]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta\tau}\left[S_t e^{\sigma\sqrt{\tau}x - \frac{\sigma^2}{2}\tau} - K e^{-(r-\delta)\tau}\right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \tag{9}$$

El dominio de integración de (9) se puede descomponer en dos intervalos; uno en el que la función valor positivo es distinta de cero, y otro en el que es cero, con lo cual, como límite inferior de integración sustituimos $-\infty$ por x_0, que es como denominamos al valor que divide la recta real en los dos intervalos. Vamos a calcular x_0 .

$$S_t e^{\sigma\sqrt{\tau}x - \frac{\sigma^2}{2}\tau} - K e^{-(r-\delta)\tau} \geq 0 \tag{10}$$

Veamos a partir de que valor de x se cumple (10). Tomando logaritmos y reordenando la inecuación...

$$\begin{aligned} \ln S_t + x\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\tau &\geq \ln K - (r-\delta)\tau \\ x\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\tau &\geq -\ln S_t + \ln K - (r-\delta)\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\tau &\geq -\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \ln\left(e^{(r-\delta)\tau}\right)\right) \\
x &\geq -\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right) + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

El término derecho de (11) es el valor frontera x_0 buscado. Por tanto la integral (9) se reduce al intervalo de x_0 a $-\infty$.

$$
E\left(e^{-r\tau}\left[S_T - K\right]^+\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x_0}^{+\infty} e^{-\delta\tau}\left[S_t e^{\sigma\sqrt{\tau}x - \frac{\sigma^2}{2}\tau} - Ke^{-(r-\delta)\tau}\right]^+ e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \qquad (12)
$$

Esto se descompone en la suma de dos integrales que pasamos a llamar I_1 e I_2 .

$$
\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_t e^{-\delta\tau}\int_{x_0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2}x^2 - \sigma\sqrt{\tau}x + \frac{\sigma^2}{2}\tau\right)}dx}_{I_1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-r\tau}\int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx}_{I_2} \qquad (13)
$$

Resolvemos primero I_2 :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-r\tau}\int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{-x_0} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \qquad (14)
\end{aligned}
$$

El último paso en el desarrollo de arriba es debido a que el integrando es una función par. Denotemos $d_- = -x_0$. Entonces.

$$
d_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \qquad (15)
$$

Por tanto tenemos que

$$
I_2 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \qquad (16)
$$

Pero $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ es la función distribución normal estándar de d_-. Finalmente queda:

$$
I_2 = -Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_-\right) \qquad (17)
$$

Sólo queda calcular I_1 para obtener el precio de la opción. En (13) se ve claramente que $x^2 - 2\sigma\sqrt{\tau}x + \sigma^2\tau = \left(x - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2$, quedando:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t e^{-\delta\tau} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x-\sigma\sqrt{\tau}\right)^2} dx \tag{18}$$

En (18) efectuamos el cambio de variable $x^{'} = (x - \sigma\sqrt{\tau})$ con $dx^{'} = dx$, pasando a ser el límite inferior de la integral $x_0 - \sigma\sqrt{\tau}$.

$$I_1 = S_t e^{-\delta\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0-\sigma\sqrt{\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^{'2}} dx^{'} \tag{19}$$

Como $e^{-\frac{1}{2}x^{'2}}$ es una función par, podemos cambiar los signos y el orden de los límites de integración. Haciendo $d_+ = -x_0 + \sigma\sqrt{\tau}$, nos queda

$$\begin{aligned}
I_1 &= S_t e^{-\delta\tau} \Phi\left(d_+\right) \\
I_2 &= -K e^{-r\tau} \Phi\left(d_-\right) \\
d_\pm &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{S_t}{K e^{-(r-\delta)\tau}}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}
\end{aligned} \tag{20}$$

EL precio de la call europea en tiempo t es:

$$C\left(S_t\right) = S_t e^{-\delta\tau} \Phi\left(d_+\right) - K e^{-r\tau} \Phi\left(d_-\right) \tag{21}$$

Realizando el desarrollo anterior, pero utilizando el payoff de la put en tiempo T, $[K - S_T]^+$, obtenemos la fórmula del precio en tiempo $t \leq T$.

$$P\left(S_t\right) = K e^{-r\tau} \Phi\left(-d_-\right) - S_t e^{-\delta\tau} \Phi\left(-d_+\right) \tag{22}$$

4 Cálculo directo de las griegas más importantes

4.1 Delta

Es la variación del precio de la opción frente al subyacente (valor spot). La derivada parcial del precio con respecto a S_t.

$$
\begin{aligned}
\Delta \equiv \frac{\partial C}{\partial S_t} &= e^{-\delta\tau}\Phi\left(d_+\right) + S_t e^{\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right)\frac{\partial d_+}{\partial S_t} - Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\frac{\partial d_-}{\partial S_t} \\
&= e^{-\delta\tau}\Phi\left(d_+\right) + \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{\tau}}\left[S_t d^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) - Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right]
\end{aligned}
$$

Para utilizarlo en desarrollos posteriores vamos a demostrar que $S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) - Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)$ es identicamente 0.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(S_t e^{-\delta\tau-\frac{1}{2}d_+^2} - Ke^{-r\tau-\frac{1}{2}d_-^2}\right) = \\
&\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{S_t e^{-\delta\tau-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right)+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}\right]^2} - Ke^{-r\tau-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right)-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}\right]^2}\right\} = \\
&\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2\tau}\ln^2\left(\frac{S_t}{Ke^{(r-\delta)\tau}}\right)+\frac{1}{4}\sigma^2\tau\right]}\cdot\left[S_t e^{-\delta\tau-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right)} - Ke^{-r\tau+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right)}\right] = \\
&\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2\tau}\ln^2\left(\frac{S_t}{Ke^{(r-\delta)\tau}}\right)+\frac{1}{4}\sigma^2\tau\right]}\cdot\left[S_t e^{-\delta\tau}\sqrt{\frac{K}{S_t}}e^{-\frac{1}{2}(r-\delta)\tau} - Ke^{-r\tau}\sqrt{\frac{S_t}{K}}e^{\frac{1}{2}(r-\delta)\tau}\right] = \\
&\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2\tau}\ln^2\left(\frac{S_t}{Ke^{(r-\delta)\tau}}\right)+\frac{1}{4}\sigma^2\tau\right]}\cdot\sqrt{S_t K}\cdot\underbrace{\left(e^{-\delta\tau-\frac{1}{2}r\tau+\frac{1}{2}\delta\tau} - e^{-r\tau+\frac{1}{2}r\tau-\frac{1}{2}\delta\tau}\right)}_{=0} = 0
\end{aligned}
$$

Q.E.D

Por tanto volviendo al cálculo de la delta y usando este resultado intermedio:

$$
\Delta_c \equiv \frac{\partial C}{\partial S_t} = e^{-\delta\tau}\Phi\left(d_+\right) \tag{23}
$$

4.2 Gamma

El cálculo de la Gamma es bastante inmediato, sólo hay que volver a derivar la expresión obtenida de la delta, otra vez, con respecto a S.

$$
\begin{aligned}
\Gamma \equiv \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} &= e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right)\frac{\partial d_+}{\partial S_t} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{e^{-\delta\tau}}{S_t}\Phi'\left(d_+\right) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

4.3 Vega

Es la variación del precio de la opción con respecto a la volatilidad del subyacente.

$$
\begin{aligned}
V \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right)\frac{\partial d_+}{\partial \sigma} + Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right) = \\
S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right)\cdot\left[-\frac{1}{\sigma^2\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\right] - \\
Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\cdot\left[-\frac{1}{\sigma^2\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\right] = \\
-\frac{1}{\sigma^2\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right)\cdot\underbrace{\left(S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) - Ke^{-r\tau}\Phi\left(d_-\right)\right)}_{=0} + \\
\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\left(S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) + Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right)
\end{aligned}
$$

Por tanto la vega es igual a:

$$
V \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{\tau}\left(S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) + Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right) \qquad (25)
$$

Vamos a desarrollar el resultado anterior para simplificar la expresión de la vega. Para ello vamos a utilizar $S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) - Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right) = 0$ demostrado líneas arriba en el cálculo de la delta.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\left(S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) + Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right) = \\
\frac{1}{2}\sqrt{\tau}\left\{\left[S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) + Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right] + \underbrace{\left[S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) - Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right]}_{=0}\right\} = \\
S_t\sqrt{\tau}\Phi'\left(d_+\right)e^{-\delta\tau}
\end{aligned}
$$

Por tanto la Vega vale.

$$V \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t \sqrt{\tau} \Phi' \left(d_+\right) e^{-\delta\tau} \tag{26}$$

4.4 Rho

Representa la sensibilidad del precio de la opción frente a un movimiento en los tipos de interés.

$$\begin{aligned}\rho \equiv \frac{\partial C}{\partial r} &= S_t e^{-\delta\tau} \Phi' \left(d_+\right) \frac{\partial d_+}{\partial r} - K e^{-r\tau} \Phi' \left(d_-\right) \frac{\partial d_-}{\partial r} + \tau K e^{-r\tau} \Phi \left(d_-\right) = \\ &\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \underbrace{\left[S_t e^{-\delta\tau} \Phi' \left(d_+\right) - K e^{-r\tau} \Phi' \left(d_-\right)\right]}_{=0} + \tau K e^{-r\tau} \Phi \left(d_-\right) = \\ &\tau K e^{-r\tau} \Phi \left(d_-\right)\end{aligned}$$

Por tanto la rho vale:

$$\rho = \tau K e^{-r\tau} \Phi \left(d_-\right) \tag{27}$$

4.5 Theta

Representa la variación del precio de la opción frente a la fecha de valoración, es decir, la fecha t a la que se fija el precio spot del subyacente S_t. Aquí, en todo el desarrollo, se asume $\tau \equiv T - t$, que es el tiempo trnascurrido a vencimiento de la opción.

Usando la regla de la cadena para el cálculo de derivadas, obtenemos el valor de theta (θ).

$$\theta \equiv \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \tag{28}$$

Vamos a calcular en primer lugar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial \tau} &= -\delta S_t e^{-\delta\tau}\Phi\left(d_+\right) + S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right)\frac{\partial d_+}{\partial \tau} - \\ &\quad -Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\frac{\partial d_-}{\partial \tau} + Kre^{-r\tau}\Phi\left(d_-\right)\end{aligned} \tag{29}$$

Pero recordando cuanto vale $d_\pm$, calulando sus derivadas parciales con respecto a τ y sustituyéndolas por su valor en la equación de arriba obtenemos:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\delta S_t e^{-\delta\tau}\Phi\left(d_+\right) + \\ &\quad \left[-\frac{1}{2\sigma\tau\sqrt{\tau}}\ln\left(\frac{S_t}{Ke^{-(r-\delta)\tau}}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(r-\delta\right)\right]\cdot\underbrace{\left[S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) - Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right]}_{=0} + \\ &\quad \frac{1}{4\sqrt{\tau}}\sigma\underbrace{\left[S_t e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) + Ke^{-r\tau}\Phi'\left(d_-\right)\right]}_{2S_t\Phi'(d_+)e^{-\delta\tau}} + \\ &\quad +Kre^{-r\tau}\Phi\left(d_-\right)\end{aligned}$$

Finalmente multiplicando por -1 y sacando factor común de las cantidades que se repiten en cada término tenemos:

$$\theta \equiv \frac{\partial C}{\partial t} = \left[\delta\Phi\left(d_+\right) - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}\Phi'\left(d_+\right)\right]S_t e^{-\delta\tau}\Phi\left(d_-\right) - Kre^{-r\tau}\Phi\left(d_-\right) \tag{30}$$

4.6 Griegas principales para las opciones de tipo put

De la misma forma se pueden obtener las griegas más importantes para las opciones de tipo put.

$$\begin{aligned}\Delta &= e^{-\delta\tau}\left(\Phi\left(d_+\right) - 1\right) \\ \Gamma &= \frac{1}{\sigma S_t\sqrt{\tau}}e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) \\ V &= S_t\sqrt{\tau}e^{-\delta\tau}\Phi'\left(d_+\right) \\ \rho &= -K\tau e^{-r\tau}\Phi\left(-d_-\right) \\ \theta &= -\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{\tau}}e^{-\delta\tau}\Phi'\left(-d_+\right) - \delta S_t e^{-\delta\tau}\Phi\left(-d_+\right) + rKe^{-r\tau}\Phi\left(-d_-\right)\end{aligned}$$